

Równanie Darcy jako podstawa analizy teoretycznej szczególnych przypadków procesu filtracji

*Tadeusz Piecuch
Politechnika Koszalińska*

1. Wstęp

Proces filtracji doczekał się w literaturze światowej w tym także i polskiej ogromnej ilości różnorodnych publikacji analizujących ten proces zarówno od strony badawczej jak i od strony teoretycznej m.in. [1÷69].

Pierwsze znaczące publikacje ukazały się prawie sto lat temu a do wybitnych badaczy tego procesu należy zaliczyć takich autorów jak Darcy, Kozeny, Carman, Tiller, Orlicek, Le Lec, Heerkies, Haas, Dahllström, Luckert, Żuzikow i wielu innych, a wśród polskich badaczy m.in. Koch, Wroński, Palica, i inni.

Oczywiście badacze ci reprezentują różne podejścia do analizy procesu filtracji, aczkolwiek najczęściej bazą tych rozważań są pierwotne ujęcia zapisu procesu filtracji wg Darcyego i Jego uczniów.

Autor niniejszej publikacji także posłużył się wyjściowym zapisem równania Darcyego do analizy tegoż procesu, prowadząc rozważania i zapisy w tzw. układzie ciężarowym jednostek; wielu autorów np. m.in. M. Palica prowadzi tego typu analizy w układzie masowym [19÷24, 50].

2. Ogólne teoretyczne założenia modelowe przebiegu procesu filtracji

Ogólnie znane równanie Darcyego na określenie prędkości jest równaniem odnoszącym się do przepływu płynu (cieczy) przez warstwę porowatą, przy czym ciecz jest tu układem jednofazowym. Tymczasem proces filtracji to napływ na przegrodę porowatą układu dwufazowego czyli mieszaniny cieczy i ciała stałego.

Zatem napływ mieszaniny na tzw. przegrodę, czyli proces filtracji, może mieć następujące warianty m.in. [46]:

- napływ mieszaniny na przegrodę, którą stanowi tylko siatka filtracyjna
- napływ mieszaniny na przegrodę, którą stanowi siatka filtracyjna oraz usypiane na tej siatce filtracyjne złożo porowate

W pierwszym układzie odniesienia jw. faza stała napływającej mieszaniny zatrzymuje się na siatce filtracyjnej tworząc osad filtracyjny. Natomiast w drugim przypadku jw. mogą zaistnieć trzy alternatywne procesy filtracji, tj.

- napływająca faza stała mieszaniny zatrzymuje się tylko w porach złoża filtracyjnego
- napływająca faza stała tworzy tylko warstwę osadu filtracyjnego na złożu filtracyjnym
- napływająca faza stała mieszaniny zatrzymuje się częściowo w porach złoża filtracyjnego, a częściowo tworzy osad filtracyjny na złożu filtracyjnym.

Spróbujmy zatem przeanalizować w oparciu o przyjęte modele wielowariantowe jw. przebieg procesu filtracji wychodząc najpierw z ogólnego bazowego równania Darcyego przepływu płynu przez ogólnie przegrodę porowatą.

3. Przepływ płynu przez przegrodę porowatą

Pod pojęciem płynu (tu cieczy) będziemy rozumieli układ jednofazowy, a więc ciecz tzw. jednorodną o określonej stałej lepkości i stałym ciężarze właściwym; do rozważań można więc przyjąć, że jest to po prostu woda.

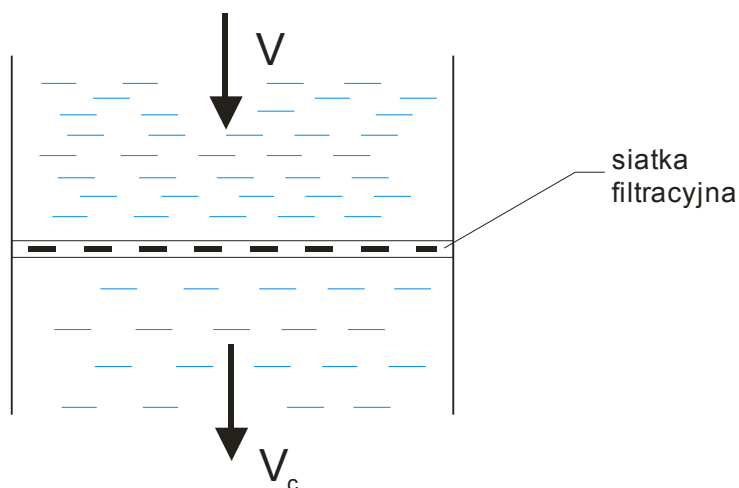
Taka ciecz przepływa więc przez przegrodę porowatą rys. 1 z określoną prędkością „u” atakując powierzchnie przegrody „A”, a więc jako iloczyn tych dwóch parametrów napływając z określoną wydajnością objętościową „ \dot{V} ”, co ujmuje najprostszy zapis równania Darcyego (analog prawa Ohma w elektronice) [5, 12, 13, 14, 47].

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{R} \quad (1)$$

gdzie:

R – całkowity opór przegrody porowatej,

Δp – różnica ciśnień cieczy po obu stronach przegrody.



Rys. 1. Napływ cieczy na siatkę filtracyjną
Fig. 1. Inflow of liquid on filtration net

Odnośną przegrodą porowatą może tu być tylko siatką filtracyjną, której opór R_s określa równanie jak niżej m.in. [5, 11, 12, 15, 16].

$$R_s = t' \frac{\mu}{A} \quad (2)$$

gdzie:

- t' – stała siatki (wyznaczana doświadczalnie),
- μ – dynamiczny współczynnik lepkości cieczy,
- A – powierzchnia przegrody, tu powierzchnia siatki filtracyjnej.

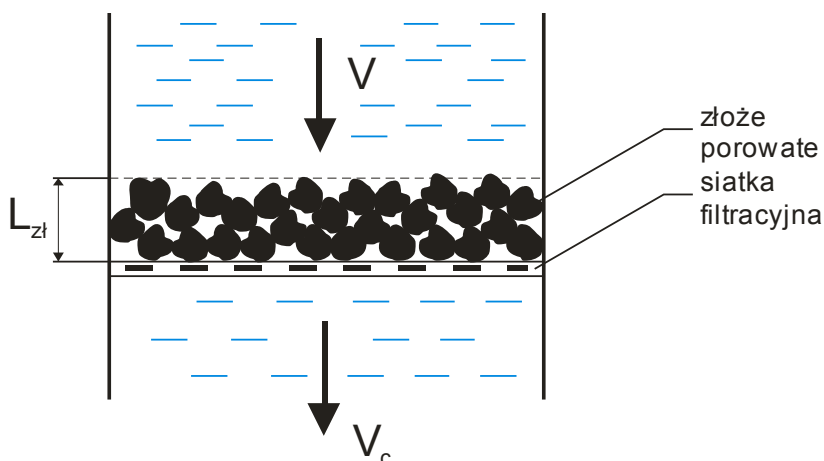
Natomiast jeżeli przegrodą jest złożo (filtracyjne) porowate to opór złoża R_{zl} określa równanie

$$R_{zl} = \alpha \cdot \frac{L_{zl}}{A} \quad (3)$$

gdzie:

- α – opór właściwy złoża porowatego,
- L_{zl} – grubość złoża porowatego,
- A – powierzchnia przegrody, tu powierzchnia złoża porowatego.

W praktyce najczęściej złożo porowate jest usypane na przegrodzie porowatej podtrzymującej to złożo – rys. 2. Taką przegrodą jest często właśnie siatka filtracyjna.



Rys. 1. Napływ cieczy na złożo porowate usypane na siatce filtracyjnej

Fig. 2. Inflow of liquid on porous bed located on filtration net

Zatem równanie przepływu objętościowego przez przegrodę porowatą złożoną z siatki filtracyjnej oraz usypanej na niej warstwy złoża porowatego będzie miało postać:

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \alpha \frac{L_{zł}}{A}}, \quad (4)$$

przy czym istnieje zależność, że opór właściwy określa równanie 5.

$$\alpha = \frac{\mu}{K} \quad (5)$$

gdzie:

K – stała przepuszczalności.

Powyżej sformułowane równanie 4 na określenie przepływu objętościowego \dot{V} nie jest równaniem filtracji, lecz równaniem przepływu płynu przez warstwę porowatą złoża posiadającą określoną porowatość (ε) określona dla przepływu laminarnego równaniem Kozeny-Carmana m.in. [5, 8, 9, 56].

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} = k \cdot \Delta p^s \quad (6)$$

gdzie:

ε – porowatość,

- s – współczynnik ściśliwości złoza porowatego (teoretycznie zmieniający się od wartości 0 do wartości 1),
- k – stała Kozeny (wyznaczana doświadczalnie dla danych warunków procesu).

Równocześnie istnieje związek funkcyjny między parametrem tzw. przepuszczalności „K” oraz ściśliwością warstwy porowatej „s” i ciśnieniem napływu medium Δp na tę warstwę, co określa równanie (7)

$$K = \frac{b}{\Delta p^s} \quad (7)$$

gdzie

b – stała równania (wyznaczana doświadczalnie dla danej warstwy złoza).

Wprowadzając zatem równania (6) oraz (7) do równania ogólnego przepływu (4) otrzymamy równanie (8)

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \Delta p^s \cdot \frac{L_{zl}}{A}}, \quad (8)$$

oraz równanie 9

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{k \cdot \varepsilon^3} \cdot \frac{L_{zl}}{A}}. \quad (9)$$

W praktyce inżynierskiej warstwa złoza porowatego jest najczęściej nieściśliwa (szczególnie przy mniejszych ciśnieniach i złożach gruboziarnistych).

Zatem przyjmuje się często w przybliżeniu, że współczynnik ściśliwości „s” równa się zero, czyli wartość ciśnienia do potęgi zero równa się jeden, co upraszcza zapis równania (8).

Natomiast wartość współczynnika porowatości ε w równaniu (9) w przypadku przepływu płynu przez warstwę porowatą w przybliżeniu nieściśliwą – jest stała. Zatem powyższe formuły klasycznej teorii przepływu płynu przez przegrody porowate (siatka filtracyjna, złoże porowate) nie są jeszcze formułami opisującymi proces filtracji.

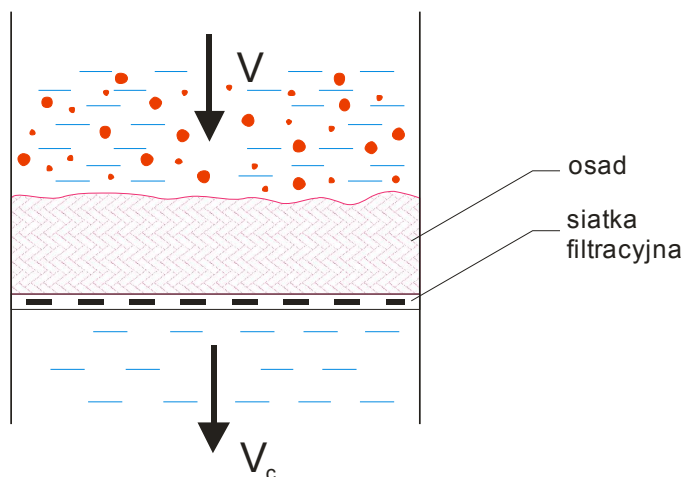
4. Proces filtracji na siatce filtracyjnej

W przypadku procesu filtracji mieszaniny cieczy i ciała stałego kierowanej na siatkę filtracyjną przyjmijmy czysto teoretycznie upraszczające założenie, że wszystkie ziarenka tworzące fazę stałą mieszaniny zostają zatrzymane na siatce filtracyjnej tworząc warstwę osadu filtracyjnego (rys. 3).

Przy takim założeniu, formalnie wielkość ziaren mieszaniny kierowanej do procesu filtracji muszą przekraczać wielkość oczek siatki filtracyjnej lub odpowiadać filtracji wg teorii tzw. mostów wg Hertjessa-Hassa wielokrotnie opisywanej przez autora publikacji, m.in. w [25, 37, 47].

Przyjmuje się, iż oczka siatki filtracyjnej nie ulegają zamykaniu przez ewentualne blokowanie ziarna ciała stałego.

Taki model filtracji jak na rys. 3 odpowiada w przybliżeniu np. w praktyce filtracji na filtrach próżniowych lub prasach filtracyjnych.



Rys. 3. Napływ mieszaniny na siatkę filtracyjną

Fig. 3. Inflow of suspension on filtration net

Powyższe teoretyczne założenie można opisać równaniem (10) jak niżej

$$V \cdot \beta = L_{os} \cdot A(1 - \varepsilon_{os}) \cdot \delta_s \quad (10)$$

gdzie:

V – objętość mieszaniny kierowanej do procesu filtracji,

β – zagęszczenie fazy stałej w całkowitej objętości mieszaniny,

L_{os} – grubość utworzonego na siatce filtracyjnej osadu filtracyjnego,

ε_{os} – porowatość utworzonego na siatce osadu filtracyjnego,

Δ_s – ciężar właściwy fazy stałej tworzącej mieszaninę.

Podzielmy obustronnie powyższe równanie 10 przez kwadrat powierzchni filtracyjnej otrzymując tym samym zapis jak niżej

$$\frac{V \cdot \beta}{A^2(1-\varepsilon) \cdot \delta_s} = \frac{L_{os}}{A}, \quad (11)$$

a następnie wprowadźmy iloraz L_{os}/A do równania (8) – przy czym oczywiście grubość warstwy osadu na siatce filtracyjnej L_{os} znajduje się w zapisie tego równania w miejsce grubości warstwy porowatej złoża $L_{zł}$ w omówionym dla równania (8) wariancie.

Otrzymamy więc ostatecznie następujący zapis równania filtracji mieszaniny napływającej na siatkę filtracyjną (12) – dla stałego ciśnienia Δp i zmieniającej się z czasem wydajności objętościowej.

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \Delta p^s \cdot \frac{V \cdot \beta}{A^2(1-\varepsilon_{os})\delta_s}} \quad (12)$$

Powyższe równanie można napisać także następująco

$$\frac{V}{t} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \Delta p^s \cdot \frac{V \cdot \beta}{A^2(1-\varepsilon_{os})\delta_s}}, \quad (13)$$

w którym to równaniu (13) przepływ \dot{V} zastąpiono ilorazem objętości mieszaniny i czasu potrzebnego na jej przefiltrowanie przez siatkę filtracyjną.

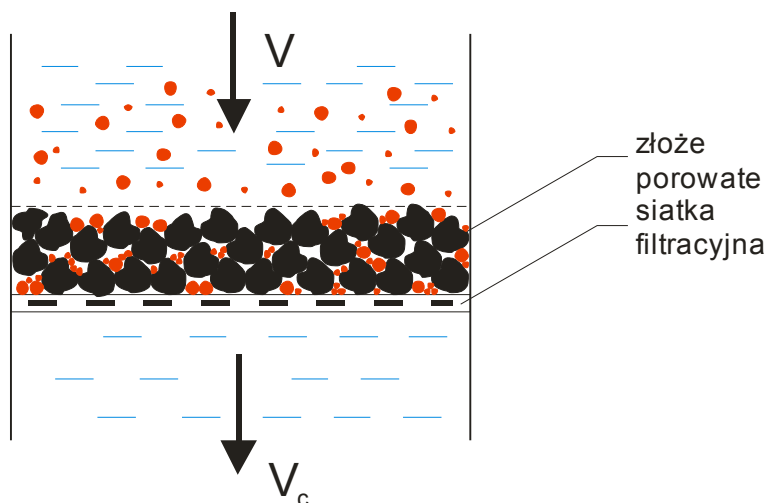
Oczywiście, jeżeli przyjmiemy, że ciśnienie filtracji Δp będzie miało wartość stałą, to z biegiem czasu nagromadzania się osadu na siatce filtracyjnej będzie zwiększał się ogólny opór filtracji, a tym samym będzie malał wydatek objętościowy V .

Jeżeli więc przyjmiemy, że lewa strona równania (12) to średni przepływ objętościowy w czasie trwania procesu – to jednocześnie odnosił się on będzie do średniej warstwy grubości osadu L_{os} w czasie trwania procesu.

Ogólne równanie filtracji dla tego przypadku wg zapisu (12) można także odnieść do stałego przepływu medium czyli $V/t = \text{constans}$. Oczywiście wówczas ciśnienie filtracji Δp występujące w liczniku będzie zmienne w czasie.

5. Proces filtracji na siatce filtracyjnej ze złożem porowatym z pełną kolmatacją bez przyrostu warstwy osadu

W tym teoretycznym wariancie procesu filtracji mamy więc taką filtrację w której to wszystkie ziarenka tworzące fazę stałą mieszaniny kierowanej na ogólnie złożo filtracyjne zatrzymają się wewnątrz tego złoża porowatego usypanego na siatce filtracyjnej jeszcze przed rozpoczęciem procesu filtracji (rys. 4).



Rys. 4. Napływ mieszaniny na złożo porowate usypane na siatce filtracyjnej z kolmatacją złoża

Fig. 4. Inflow of suspension on porous bed located on filtration net with bed colmatation

W takim przypadku wszystkie ziarenka ciała stałego mieszaniny ułożą się w porach tej warstwy porowatej (np. żwiru, który często tworzy taką warstwę) a równocześnie nie zgromadzi się żaden osad na tej warstwie porowatej. Tym samym więc zmniejszy się porowatość warstwy porowatej z porowatości pierwotnej do znacznie mniejszej porowatości końcowej.

Aby więc opisać taki model skorzystajmy z ogólnego zapisu równaniem (9) modyfikując go do postaci jak w równaniu (14)

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{złsr})^2}{k \cdot \varepsilon_{złsr}^3} \cdot \frac{L_{złsr}}{A}} \quad (14)$$

gdzie:

$\varepsilon_{z_{1st}}$ – średnia porowatość złoża w trakcie trwania procesu.

Wprowadzając więc do powyższego zapisu (14) parametr średniej porowatości złoża w trakcie trwania procesu filtracji – która to porowatość zmieni się od pierwotnej największej do końcowej najmniejszej, otrzymamy po lewej stronie równania (14) wydajność objętościową procesu \dot{V} także jako średnią wydajność odfiltrowania porcji nadanej zawiesiny o objętości V w czasie t filtracji.

Właśnie w przypadku takiego zapisu równania (14) tj. w przypadku wprowadzenia parametru średniej porowatości złoża, które ulega kolmatacji w trakcie trwania procesu – adaptuje się ogólne równanie przepływu płynu przez warstwę porowatą, do równania filtracji (14) mieszaniny ziaren fazy stałej i cieczy w warstwie porowatej usypanej na siatce filtracyjnej (stanowiącej tu głównie podporę dla usypiania warstwy porowatej – co jest charakterystyczne dla filtrów złożowych tzw. grawitacyjnych).

Analizując dalej zapis wg równania (14) łatwo zauważyć, że zmiana parametru porowatości pozostaje w funkcji ilości skolmatowanych ziarn w złożu porowatym.

Tę całkowitą ilość ziarn, czyli fazy stałej w zawieszynie można wyliczyć z prostego równania, czyli z definicji wskaźnika zagęszczenia:

$$Q_s = V \cdot \beta \quad (15)$$

gdzie:

Q_s – ilość ciężarowa fazy stałej w objętości mieszaniny V kierowanej do procesu filtracji,

β – wskaźnik zagęszczenia mieszaniny, czyli ciężaru fazy stałej Q_s w całkowitej objętości zawiesiny V podawany jako zagęszczenie ciężarowe.

$$\beta = \frac{Q_s}{V} \quad (16)$$

Zatem uogólniając w efekcie takiego procesu filtracji, końcowa porowatość złoża $\varepsilon_{z_{1kon}}$ będzie ogólnie funkcją objętości fazy stałej zawiesiny V_s , która tworzyła mieszaninę z cieczą (wodą), co można ująć w formie ogólnego zapisu funkcyjnego (17).

$$\varepsilon_{z_{1kon}} = f(V_s) = f\left(\frac{Q_s}{\delta_s}\right) \quad (17)$$

W tym miejscu można by sugerować np. określenie w oparciu o badania zależności empirycznej funkcji wg zapisu (17) i wprowadzenia tej funkcji to zapisu równania (14), ale oczywiście w odniesieniu do korekty średniej porowatości złoża. Takie badania mające charakter podstawowy mogą jednak budzić pewne wątpliwości, co do realności ich wykonania w aspekcie dokładności.

6. Model teoretyczny procesu filtracji na siatce filtracyjnej ze złożem porowatym z przyrostem osadu na złożu bez procesu kolmatacji złoża

W przypadku takiego modelu filtracji przyjmujemy, czysto teoretycznie, iż całość fazy stałej tworzącej jej mieszaninę z cieczą (wodą) zatrzymuje się na warstwie porowatej usypanej na siatce filtracyjnej a więc ziarenka fazy stałej mieszaniny nie wnikają w pory złoża porowatego, a jedynie wyłącznie tworzą nową warstwę osadu na tym złożu (rys. 5).

Tak więc w przypadku takiej teoretycznej filtracji na całkowity opór filtracji, który w zapisie ogólnego równania tworzy po prawej stronie jego mianownik, będą składały się 3 opory, tj.:

- opór siatki R_s ,
- opór złoża R_{zl} ,
- opór osadu R_{os} ,

co można zapisać ogólnym równaniem (18)

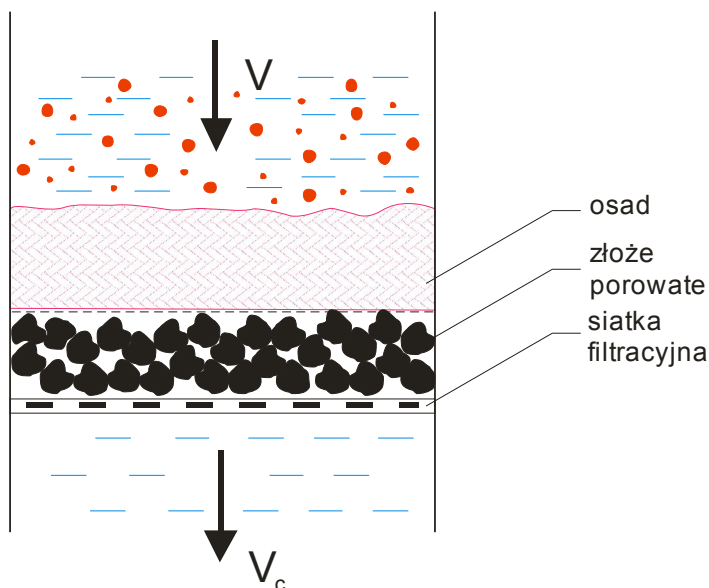
$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{R_s + R_{zl} + R_{os}}, \quad (18)$$

a następnie uzupełnić powyższe równanie (18) do pełnego zapisu funkcyjnego występujących w nim ww. oporów jak niżej (19).

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{zl})^2}{k \cdot \varepsilon_{zl}^3} \cdot \frac{L_{zl}}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \Delta p^s \frac{Q_{s_{os}}}{A^2 (1 - \varepsilon_{os}) \cdot \delta_s}} \quad (19)$$

gdzie:

- ε_{zl} – porowatość stała złoża usypanego na siatce filtracyjnej,
- ε_{os} – porowatość osadu utworzonego na złożu porowatym.



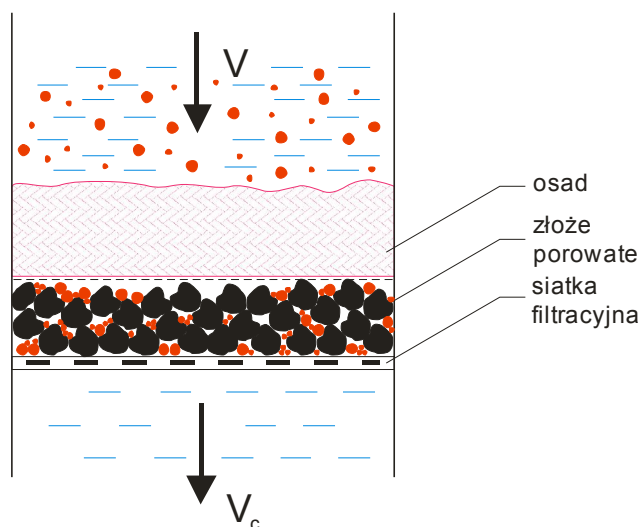
Rys. 5. Napływ mieszaniny na złożo porowate usypane na siatce filtracyjnej z osadem filtracyjnym na złożu porowatym

Fig. 5. Inflow of suspension on porous bed located on filtration net with filtration deposit on porous bed

Porowatość osadu utworzonego z ziaren mieszaniny kierowanej do procesu na złożu porowatym można w przybliżeniu przyjąć – nie popełniając tu większego błędu jako porowatość stałą. Oczywiście, jeżeli ciśnienie filtracji Δp jest znaczne (np. w prasach filtracyjnych), a osad jest ściśliwy – to można operować w tym równaniu porowatością średnią osadu w trakcie trwania procesu.

7. Proces filtracji na siatce filtracyjnej ze złożem porowatym z przyrostem osadu na złożu z jednoczesnym procesem kolmatacji złoża

W przypadku praktycznych zastosowań filtracji, np. w typowym układzie technologicznym oczyszczalni ścieków komunalnych (tzw. piaskowniki) najczęściej mamy do czynienia właśnie z filtracją grawitacyjną z jednoczesną kolmatacją warstwy złoża porowatego (piasku, żwiru) usypanego na siatce filtracyjnej (lub innej przegrodzie typu rusztu), na które to złożo kieruje się ścieki zawiesinowe (mieszaninę) do procesu filtracji, a zatrzymanie fazy stałej mieszaniny następuje zarówno wewnątrz złoża porowatego właśnie w jego porach jak i równocześnie na złożu porowatym (rys. 6).



Rys. 6. Napływ mieszaniny na złożo porowate usypane na siatce filtracyjnej z kolmatacją złoża porowatego i jednoczesnym powstaniem osadu na siatce filtracyjnej

Fig. 5. Inflow of suspension on porous bed located on filtration net with colmatation of porous bed and simultaneous deposit growth on filtration net

Powyższe można zapisać w formie prostego równania rozdziału ziarenek zawiesiny na te, które wnikną w złożo porowate i tam pozostaną (kolmatacja) oraz na te, które utworzą osad na tym złożu, co przedstawia równanie (20).

$$Q_{S_N} = Q_{S_{kol}} + Q_{S_{os}} \quad (20)$$

gdzie:

Q_{S_N} – ilość masowa lub ciężarowa fazy stałej w mieszaninie kierowanej do procesu filtracji,

$Q_{S_{kol}}$ – ilość masowa lub ciężarowa fazy stałej mieszaniny kierowanej do procesu filtracji, która zatrzymała się w złożu porowatym (kolmatacja),

$Q_{S_{os}}$ – ilość masowa lub ciężarowa fazy stałej mieszaniny kierowanej do procesu filtracji, która utworzyła osad na złożu porowatym.

Uwzględniając powyższe założenia proces filtracji w tym wariantcie, można opisać równaniem (21).

$$\dot{V} = \frac{\Delta p}{t \cdot \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{z1_{sr}})^2}{k \cdot \varepsilon_{z1_{sr}}^3} \cdot \frac{L_{z1}}{A} + \frac{\mu}{b} \Delta p^s \frac{Q_{s_{os}}}{A^2 (1 - \varepsilon_{os}) \delta_s}} \quad (21)$$

gdzie:

$\varepsilon_{z1_{sr}}$ – średnia porowatość złoża porowatego w trakcie trwania procesu filtracji z kolmatacją złoża,

ε_{os} – stała porowatość osadu filtracyjnego nagromadzonego na złożu porowatym.

W zapisie równania (21) przyjęto, że porowatość nagromadzonego osadu ε_{os} jest wartością stałą w trakcie trwania procesu, co w większości przypadków spotykanych w praktyce nie powoduje większego błędu dla rozważań filtracji na filtrach grawitacyjnych złożowych - a tego rodzaju proces rozważany jest w tym wariancie.

Także analiza teoretyczna zapisu równania (21) sugeruje dalsze ewentualne kierunki badań o charakterze podstawowym procesu filtracji, tak, aby znaleźć zależność funkcyjną np. analityczno-empiryczną dla konkretnej mieszaniny stanowiącej zawiesinowy ścieki rzeczywiste – $\varepsilon_{z1} = f(Q_{s_{kol}})$ i wprowadzenie sformułowanego empirycznie równania do zapisu równania (21).

8. Resume

Przeprowadzona powyżej analiza teoretyczna różnych warunków (sposobów) procesu filtracji nie jest oczywiście kompletna, można by ją poszerzać i uściślić.

Przede wszystkim przedstawiony powyżej tok rozważań opiera się głównie na założeniu procesu filtracji pod stałym ciśnieniem ($\Delta p = \text{constans}$) a wówczas w trakcie trwania procesu maleje prędkość filtracji, a więc maleje z czasem także wydajność objętościowa \dot{V} .

Oczywiście można utrzymać w pewnych granicach trwania czasu filtracji stały przepływ \dot{V} , ale wówczas ze względu na wzrost oporów filtracji należy zwiększać, także stopniowo, ciśnienie filtracji Δp w czasie jej trwania.

Często w praktyce mamy do czynienia z taką filtracją, gdzie równocześnie obniża się ciśnienie filtracji, równocześnie maleje prędkość filtracji a jeżeli mamy np. do czynienia z filtracją z jednoczesnym przyrostem warstwy osadu oraz kolmatacją złoża porowatego – to i także obniża się porowatość złoża i może się obniżyć porowatość osadu, gdy jest on ściśliwy i pod dużym ciśnieniem.

Powyższe można więc zapisać dla wariantu filtracji określonego równaniem (21) (siatka filtracyjna, złożo porowate z kolmatacją, osad filtracyjny na złożu) jak w poniższym zapisie różniczkowym w pochodnych cząstkowych wobec czasu trwania filtracji – równanie (22).

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p(t)}{t' \frac{\mu}{A} + \frac{\mu}{b} \cdot \frac{(1 - \varepsilon_{zl}(t))^2}{k \cdot \varepsilon_{zl}^3} \cdot \frac{L_{zl}}{A} + \frac{\mu}{b} \Delta p^s \frac{Q_{s_{os}}}{A^2 (1 - \varepsilon_{os}(t)) \delta_s}} \quad (22)$$

gdzie:

$\frac{dV}{dt}$ – pochodna zmiany przepływu objętościowego wobec czasu filtracji,

$\Delta p(t)$ – ciśnienia filtracji zmienne w czasie,

$\varepsilon_{zl}(t)$ – porowatość złoża filtracyjnego zmienna w czasie,

$\varepsilon_{os}(t)$ – porowatość osadu filtracyjnego zmienna w czasie.

Oczywiście pozostaje otwarty problem rozwiązania takiego równania różniczkowego opisanego przykładowo przez pochodne cząstkowe.

Wreszcie należy zauważyć, że równania te, będące wynikiem transformacji klasycznych równań przepływu płynu przez warstwy porowate nie zawierają niezwykle istotnego czynnika, którym jest parametr wielkości ziaren złoża porowatego wobec parametru wielkości ziaren tworzących fazę stałą mieszaniny kierowanej do procesu filtracji. Takie badania modelowe procesu filtracji można oczywiście prowadzić np. dla wąskich klas ziarnowych fazy stałej mieszaniny kierowanej do procesu wobec pewnej przyjętej średnicy ziaren złoża porowatego, ale zawsze będą one dalekie od realnej praktyki inżynierskiej. W warunkach rzeczywistych mamy najczęściej do czynienia ze stosunkowo dużą rozpiętością średnicy umownej ziaren fazy stałej mieszaniny kierowanej do procesu filtracji jak i ziaren tworzących złożo porowate. Często nie są one jednakowe, a są znacznie zróżnicowane (co najwyżej są do siebie zbliżone w pewnym ewentualnym wąskim przedziale wielkości średnic ziaren).

Dlatego też w przypadku szeroko rozumianych procesów filtracji z punktu widzenia zastosowań inżynierskich bardziej przydatne są formuły analityczno-empiryczne konstruowane na podstawie wyników badań prowadzonych na konkretnej mieszaninie (ścieku zawieszinowym) rzeczywistej, przy czym najważniejszymi zmiennymi wynikowymi procesu są najczęściej zawartość wilgoci w osadzie filtracyjnym (chodzi o jego transportowalność) oraz wydajność m.in. [25, 29, 30, 35÷39, 48, 49].

Można znaleźć wiele przykładów zastosowań takich formuł.

Spis symboliki

- A – powierzchnia filtracyjna [m^2],
– *filtration surface*,
- K – stała przepuszczalności [m^2],
– *permeability constant*,
- L_{os} – grubość osadu [m],
– *deposit thickness*,
- $L_{zł}$ – grubość złoża [m],
– *bed height*,
- Q – ciężar mieszaniny [kG],
– *suspension weight*,
- Q_s – ciężar fazy stałej w mieszaninie [kG],
– *solids weight in suspension*,
- Q_c – ciężar fazy ciekłej w mieszaninie [kG],
– *liquid phase weight in suspension*,
- $Q_{S_{kol}}$ – ciężar ziarn skolmatowanych w parach złoża [kG],
– *solids weight colmatated in pores of bed*,
- $Q_{S_{os}}$ – ciężar ziarn tworzonych w osadzie na złożu porowatym [kG],
– *weight of grains created in deposit on porous bed*,
- Q_{S_N} – ciężar ziarn w mieszaninie kierowanej do procesu filtracji [kG],
– *weight of grains in suspension directed to filtration process*,
- R – opór całkowity [$kG \cdot s/m^5$],
– *total resistance*,
- R_s – opór siatki filtracyjnej [$kG \cdot s/m^5$],
– *resistance of filtration net*,
- $R_{zł}$ – opór złoża porowatego [$kG \cdot s/m^5$],
– *resistance of porous bed*,
- R_{os} – opór osadu filtracyjnego [$kG \cdot s/m^5$],
– *resistance of filtration deposit*,
- Δp – ciśnienie [kG/m^2],
– *pressure*,
- V – objętość mieszaniny [m^3],
– *suspension volume*,
- V_s – objętość fazy stałej w mieszaninie [m^3],
– *volume of solid phase in suspension*,
- V_c – objętość cieczy w mieszaninie [m^3],
– *volume of liquid phase in suspension*,

- \dot{V} – objętościowy napływ mieszaniny [m^3/s],
– *volume inflow of suspension*,
- \dot{V}_s – objętościowy napływ fazy stałej w mieszaninie [m^3/s],
– *volume inflow of solid phase in suspension*,
- \dot{V}_c – objętościowy przepływ cieczy w mieszaninie [m^3/s],
– *volume inflow of liquid phase in suspension*,
- b – stała w równaniu Kozeny [kG],
– *constant in Kozena equation*,
- k – stała Kozeny w równaniu Kozeny-Carmana [-],
– *Kozena constant in Kozena-Carman equation*,
- t – czas trwania przepływu (procesu) [s],
– *flow (process) duration time*,
- t' – stała siatki filtracyjnej [m^{-1}],
– *constant of filtration net*,
- u – prędkość przepływu [m/s],
– *flow velocity*,
- s – współczynnik ściśliwości w równaniu Kozeny-Carmana [-],
– *compressibility coefficient in Kozena-Carman equation*,
- α – opór właściwy filtracji [$\text{kG} \cdot \text{s}/\text{m}^4$],
– *specific resistance of filtration*,
- β – zagęszczenie ciężarowe [kG/m^3],
– *weight concentration*,
- ε – porowatość [-],
– *porosity*,
- ε_{os} – porowatość osadu [-],
– *porosity of deposit*,
- $\varepsilon_{zł}$ – średnia porowatość złoża [-],
– *average porosity of bed*,
- μ – współczynnik lepkości dynamicznej [$\text{kG} \cdot \text{s}/\text{m}^2$],
– *dynamic viscosity coefficient*,
- δ_s – ciężar właściwy fazy stałej – ziarenek mieszaniny [kG/m^3].
– *specific weight of solid phase – grains of suspension*.

Uwaga:

Układ jednostek przy parametrach fizykalnych podanych w powyższym wykazie symboliki jest ujęty w układzie ciężarowym – technicznym (tj. kilogram siła – ciężar, metr, sekunda). Gdyby prowadzono powyższy zapis w ukła-

dzie SI (kilogram masa, newton siła – ciężar, sekunda) wówczas należy podać lepkość μ [$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$], zagęszczenie masowe β [kg/m^3], ilość kierowanej mieszaniny (podobnie ilość fazy stałej i ciekłej w mieszaninie) jako masę [kg], opór R [$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$], opór właściwy α [$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^4$], gęstość [kg/m^3], ciśnienie Δp [N/m^2], uwzględniając w równaniach przy wprowadzaniu masy i gęstości parametr przyspieszenia ziemskiego g [m/s^2].

Literatura

1. **Anielak A. M.:** *Analityczno-empiryczne kryterium filtracji ciśnieniowej i rotacyjnej*. Praca doktorska. Promotor prof. dr hab. inż. Tadeusz Piecuch, Politechnika Śląska, Gliwice 1982.
2. **Anielak A. M., Piecuch T.:** *Analityczno-empiryczne kryterium filtracji ciśnieniowej i odśrodkowej zawiesiny poflotacyjnych odpadów cynku i ołowiu*. Archiwum Górnictwa – PAN, Tom 29, z.3, 1984.
3. **Anielak A. M., Piecuch T.:** *Analityczno-empiryczne kryterium filtracji ciśnieniowej i odśrodkowej zawiesiny poflotacyjnych odpadów rud miedzi*. Rudy i Metale Nieżelazne Nr 3, 1984.
4. **Anielak A., Piecuch T.:** *Vergleich der Entwässerung bei Druck und Zentrifugalfiltration mit Statistischen Modellen*. Chemische Technik 3, 1987.
5. **Brown. G.G. i inni.** Praca zbiorowa. *Inżynieria chemiczna. Operacje jednostkowe*. PWN Warszawa 1960.
6. **Dahlstrom D.A., Nickolaus N.:** *Theory and practice of continuous pressure filtration*. Chemical Engineering Progres, Nr 3, 1956.
7. **Dohnal J.:** *Die mechanische Eigenschaften des Filterkuchens und ihr Einfluss auf die Form der allgemeinen Filtergleichung*. Chemische Technik Nr 5, 1968.
8. **Grace H.P.:** *Resistance of compressibility of filter cakes*. Chemical Engineering Progres. Part. I, Nr 6, 1953.
9. **Grace H.P.:** *Resistance and compressibility of filter cakes*. Chemical Engineering Progress. Part. II, Nr, 1953.
10. **Hertjess P.M.:** *Industrial filtration*. Departament of Chemical Engineering, Technical University-Delf. 1948.
11. **Hertjess P.M., Haas H.:** *Studies in filtration Recueil Trav. Chim. Pays-Bas*. Nr 6, 1949.
12. **Ives K.J.:** *New concepts in filtration*. Water and Water Engineering Nr 8, 1961.
13. **Koppitz K.:** *Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Filtertheorie auf die Sateinkohle – Filterarbeit*. Teil 1. Aufbereitungs – Technik Nr 9, 1970.
14. **Koppitz K.:** *Untersuchungen über die Anwendbarkeit der Filtertheorie auf die Steinkohle-Filterarbeit*. Teil 2. Aufbereitungs – Technik Nr 12, 1970.
15. **Le Lec P.:** *Variations de permeabilite des gateaux de filtration*. Genie Chimique Nr 3, 1962.
16. **Le Lec. P.:** *Die Kompressibilitat der filterkuchen und ihr Einflu auf die filter gleichungen*. Chemische Technik. Nr, 1968.
17. **Miller S.A.:** *Filtration. Industrial and Engineering Chemistry*. Nr 1. 1955.

18. **Orlicek A.F.:** *Les principes physiques dela filtration.* Genie Chimique. 1956.
19. **Palica M., Jaschik M., Waluś J., Buzek J.:** *Odwadnianie zawiesin gipsów poneutralizacyjnych otrzymywanych w różnych stanach technologicznych procesu, cz. I. Filtracja ciśnieniowa.* Ochr. Pow. i Probl. dp., 3, 1998.
20. **Palica M., Kocurek J.:** *Badanie strefy kompresji ściśliwych osadów filtracyjnych.* Raport merytoryczny pracy BW 528/RCh-5/97, Instytut Inżynierii Chemicznej i Budowy Aparatury Politechniki Śląskiej, praca niepublikowana, Gliwice, 1997.
21. **Palica M., Kocurek J.:** *Rozdzielanie zawiesin ciał stałych w cieczach na drodze filtracji z kompresją tworzonego osadu. I. Teoretyczny opis filtracji z równoczesną kompresją osadu.* Rocznik Ochrona Środowiska Tom 4. Rok 2002.
22. **Palica M., Kocurek J.:** *Rozdzielanie zawiesin ciał stałych w cieczach na drodze filtracji z kompresją tworzonego osadu. II. Wyznaczenie parametrów filtracyjnych zawiesin oraz doświadczalna weryfikacja modelu.* Rocznik Ochrona Środowiska Tom 5. Rok 2003.
23. **Palica M., Mróz W., Zabłocki J.:** Patent P –298268.
24. **Palica M., Pęczek K., Kurowski Ł., Niemirowski J.:** *Periodyczna filtracja wirowa zawiesiny zrzutowej po wirówce BIRD'a, zawierający dodatek flokulantu Magnafloc 336.* Rocznik Ochrona Środowiska Tom 10. Rok 2008.
25. **Piecuch T.:** *Badania efektywności procesu filtracji mulów węgla surowych w świetle doświadczeń.* Praca doktorska. Promotor prof. dr hab. inż. Józef Sówka. Politechnika Śląska Gliwice 1972.
26. **Piecuch T., Anielak A.M, Koniecko G.:** *Zastosowanie filtracji rotacyjnej do oczyszczania ścieków farbiarskich.* Gaz Woda i Technika Sanitarna 5, 1983.
27. **Piecuch T., Anielak A.M.:** *Vielstufige Druckfiltration.* 17. Diskussionsagung Mechanische Flussigkeitsabtrennung. Dresden 21-22 Oktober 1980.
28. **Piecuch T., Opielka A.:** *Technologiczne badania pracy prasy filtracyjnej typu ROW.* Zeszyty Naukowe AGH – Nr 574 – seria Górnictwo, 1976.
29. **Piecuch T., Piekarski J.:** *Badanie procesu filtracji ciśnieniowej zawiesiny poprodukcyjnej z zakładu przetwórstwa drewna Polspan-Kronospan.* Monografia Komitetu Inżynierii Środowiska PAN, Vol. 11, rok 2003.
30. **Piecuch T., Piekarski J.:** *Numeryczne modelowanie procesu filtrosorpcji.* Grant KBN Nr 2T09D 00127, rok 2006.
31. **Piecuch T., Sówka R. Nawrocki J.:** *Badania nad zastosowaniem różnych siatek filtracyjnych w procesie filtracji próżniowej mulów poflotacyjnych odpadów miedziowych.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 472, Seria Górnictwo Nr 74, 1976.
32. **Piecuch T., Sówka J.:** *Stan badań teoretycznych i praktycznych nad procesem filtracji zawiesin.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 403, Seria Górnictwo, Gliwice, 1974.
33. **Piecuch T., Sówka R., Smyk A.:** *Filtracja próżniowa zawiesin poflotacyjnych odpadów miedziowych z użyciem flokulantów.* Rudy i Metale Nieżelazne Nr 6, 1976.
34. **Piecuch T., Sówka R., Sówka J.:** *Empiryczne równanie na określenie wydajności jednostkowej filtratu poflotacyjnego odpadów miedziowych.* Zeszyty Naukowe AGH Nr 447, Górnictwo Nr 57, Kraków 1974.

35. **Piecuch T., Sówka R., Sówka J.:** *Empiryczne równanie na określenie zawartości wilgoci w osadzie filtracyjnym poflotacyjnych odpadów miedziowych.* Rudy i Metale Nieżelazne, Nr 6, 1974.
36. **Piecuch T., Sówka R., Sówka J.:** *Empiryczne równanie na określenie zagęszczenia filtru poflotacyjnego odpadów miedziowych.* Inż. i Aparat. Chem. Zeszyt Nr 4-6, 1974.
37. **Piecuch T.:** *Analityczno-empiryczny model procesu filtracji próżniowej zawieszin mulów węglowych.* (praca habilitacyjna). Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej Nr 434, seria Górnictwo, 1975.
38. **Piecuch T.:** *Analiza teoretyczna przepływu medium przez modelowe wirówki sito-we.* Monografia, Wydawnictwo P.T.P.N.oZ., Częstochowa 1984.
39. **Piecuch T.:** *Badania procesu filtracji ciśnieniowej poflotacyjnych koncentratów miedzi.* Rudy i Metale Nieżelazne, Nr 10, 1978.
40. **Piecuch T.:** *Badania procesu filtracji ciśnieniowej poflotacyjnych odpadów miedzi.* Rudy i Metale Nieżelazne, Nr 12, 1978.
41. **Piecuch T.:** *Hipoteza możliwości wspólnego zapisu procesu filtracji i sedymentacji jako równania pędu.* Zeszyty Naukowe Wydziału Budownictwa i Inżynierii Środowiska Politechniki Koszalińskiej, Seria Inżynieria Środowiska Nr 12, 1988.
42. **Piecuch T.:** *Ocena wskaźników techniczno-ekonomicznych filtrów próżniowych.* Separator 3, 1970.
43. **Piecuch T.:** *Podstawy sedymentacyjnej teorii procesu filtracji.* Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej. Seria Nauki Podstawowe Nr 21. 1980.
44. **Piecuch T.:** *Problemy oceny jakości odfiltrowania osadów węglowych na filtrach.* Biuletyn NOT, INT-E-JMZ, PW. 1973.
45. **Piecuch T.:** *Równanie czasu przepływu rotacyjnego ścieku przez wirówkę filtracyjną.* Archiwum Ochrony Środowiska PAN, z 3-4, 1985.
46. **Piecuch T.:** *Studium teoretyczne procesu filtracji grawitacyjnej.* Monografia, Wydawnictwo P.T.P.N.oZ., Częstochowa 1984.
47. **Piecuch T.:** *Technika wodno-mulowa – urządzenia i procesy.* Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej. Koszalin 2007.
48. **Piecuch T.:** *Wydajność filtratu zawiesziny flotacyjnej koncentratu PbS.* Rudy i Metale Nieżelazne 12/1977.
49. **Piecuch T.:** *Zawartość wilgoci w filtracyjnym osadzie galeny.* Rudy i Metale Nieżelazne 11, 1976.
50. **Palica M., Kocurel J.:** *Wybrane zagadnienia teorii filtracji i kompresji osadów.* Monografia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. 2001.
51. **Suttle H.K.:** *Filtration.* Chemical Process Engineering Nr 8, 1962.
52. **Suttle H.K.:** *Filtration. Advances in filtration in the theoretical and practical fields.* Chemical Process Engineering Nr 2, 1960.
53. **Suttle H.K.:** *Theoretical and practical advances, atmospheric pollution problems; filter media; filters in unit processes, etc.* Chemical Process Engineering. Nr 2 1957.
54. **Tiller F.M.:** *Filtration theory today.* Chemical Engineering Progress Nr 6, 1966.

55. **Tiller F.M.:** *Numerical methods for constant rate and constant pressure filtration based on Kozeny's law.* /Lamar State College of Technology Beaumont Texas/Chemical Engineering Progress. Nr 9, 1953.
56. **Tiller F.M.:** *The role of porosity in filtration. Analytic Equations for Constant Rate Filtration.* Chemical Engineering Progress. Nr 6, 1955.
57. **Wroński S., Laskowski L.K.:** *Równanie filtracji izobarycznej układów tworzących osady w oporze właściwym zmiennym w czasie.* Prace Inst. Inż. Chem. Politechniki Warszawskiej. T. III, 1974.
58. **Wroński S., Pluciński J.:** *Jednoczesne przenoszenie pędu i masy w płynach nienewtonowskich.* Prace Inst. Inż. Chemicznej Politechniki Warszawskiej. T. III, Nr 4, 1974.
59. **Wroński S., Ptasieński J., Siwiński J.:** *Badania filtracyjnego rozdzielania zawiesiny ciała stałego w cieczy nienewtonowskiej.* Sprawozdanie Inst. Inż. Chem. Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1970.
60. **Wroński S., Ptasieński J., Siwiński J.:** *Badanie własności układów filtracyjnych złożonych z rozdrobnionego ciała stałego i cieczy nienewtonowskich.* Prace Inst. Inż. Chem. Pol. Warszawskiej. Warszawa 1972.
61. **Wroński S., Ptasieński J., Siwiński J.:** Chem. Techn. 25, 1973.
62. **Wroński S., Ptasieński J., Siwiński J.:** Prace Inst. Chem. Politechniki Warszawskiej 1. Warszawa 1972.
63. **Wroński S.:** Chem. Techn. 20, 1968.
64. **Wroński S.:** Referat na Konferencji Naukowej Inż. i Aparatury Chemicznej PAN. Arturówek 1968.
65. **Zużikow W.A.:** *O metodach określenia udielnogo soprotiwlenja filtrowalnych osadow.* Chemiczieskoje i Nieftionnoje Maszynostrojenje Nr 3, 1966.
66. **Zużikow W.A.:** *Zakonomiernosti filtrowania pri rozdieleni rasslajawajuszczichsja suspienzji na filtrie.* Chemiczieskaja Promyszlennost, Nr 4, 1960.
67. **Żużikow W.A.:** *Filtracja. Teoria i praktyka rozdzielania zawiesin.* Tłumaczenie z j. rosyjskiego WNT. Warszawa 1985.
68. **Luckert K.:** *Bewertung einer Apparatkombination.* Doktorat Dissertation Technische Hochschule. Magdeburg 1973.
69. **Luckert K.:** *Analiza procesu filtracji mulów ściekowych przy zastosowaniu powierzchniowych materiałów filtracyjnych.* II Ogólnopolska Konferencja Naukowa nt. „Kompleksowe i Szczegółowe Problemy Inżynierii Środowiska”. Ustronie Morskie 01.1987. Materiały Konferencyjne Zeszyt 3b/1987. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej (Organizator prof. Tadeusz Piecuch – Instytut Inżynierii Sanitarnej Politechniki Częstochowskiej).

Darcy Equation as the Basis of Theoretical Analysis of Special Cases of the Filtration Process

Abstract

Theoretical analysis of the various conditions (ways) of the filtration process was conducted. Analysis was based mainly on assumption of constant pressure of process ($\Delta p = \text{constans}$). In such case velocity of the filtration and also volumetric flow \dot{V} decrease during process.

Obviously constant flow \dot{V} can be maintained in certain range of duration of the filtration, but then because of increase of filtration resistances, it is necessary to increase filtration pressure also gradually.

Often in practice there are such cases of filtration, when simultaneously pressure of filtration drops, velocity of filtration decreases, and in the case of filtration with simultaneous deposit growth and colmatation of porous bed, then also porosity of the bed also drops and porosity of deposit may decrease when it is compressible and under large pressure.

Such case may be described, as for filtration variant defined by equation (21) (filtration net, porous bed with colmatation, filtration deposit on the bed), with differential notation in partial derivatives against duration time of filtration – equation (22).

Of course problem of solution of such differential equation described for example by partial derivatives is still open.

It also has to be noticed, that those equations, being the result of transformation of classic equations of liquid flow through porous bed, do not contain essential factor – size of grains creating porous bed against size of grains being solid phase of suspension inflowing to filtration process. Such model investigations may be conducted e.g. for the narrow grain classes of solid phase of suspension directed to the process against certain, assumed diameter of grains of the porous bed, but they will always be far from the real engineer's practice. In real life in most cases the range of size of grains being solid phase of suspension directed to filtration process is very wide. Also grain size of porous bed is also wide. Often they are not equal, and are considerably diverse (at most they are approximate in certain possible narrow range of diameters of grains).

That is why analytical-empirical equations constructed on the basis of the results of investigations carried out using real suspension (suspension wastewater) are more useful in engineer's applications. And the most important resulting variables are water content in filtration cake (transportation feature) and efficiency [25, 29, 30, 35÷39, 48, 49].

Many examples of application of such equations can be found.

